

Modellklassiker der VWL
Online-Programme und Steckbriefe

Mathe-Survival-Kurs

Funktionen und Differentialrechnung

Die wichtigsten Überlebenstechniken
von $y = x$ bis Lagrange

Prof. Dr. Martin Skala

Professur für VWL, insb. Internationale Wirtschaft

Hochschule Osnabrück

<https://www.zemit.wi.hs-osnabrueck.de/econmodels>

Vorwort:

Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

„Wie viele Mathe-Kenntnisse brauche ich?“ ist eine häufig gestellte Frage. Die gute Nachricht für alle, die Mathe in grauer Vorzeit ‚abgewählt‘ haben: Nicht so viel, wie man denkt – zumindest wenn Sie zu den Studierenden gehören, denen es reicht, die häufigsten ökonomisch-mathematischen und praxisbezogenen Fragen im Bachelor beantworten zu können.

Es lohnt sich nicht nur – es ist von essenzieller Bedeutung, ein Grundverständnis für die Mathematik zu bekommen. Mathe ist mehr als nur ein Propädeutikum für VWL oder BWL, sie ist eine Sprache der Abstraktion und Analytik. Und ohne Abstraktion keine Wissenschaft.

Der Kurs beginnt bei $y = x$ und endet bei Lagrange und auf dem Weg wird es Schritt für Schritt etwas schwieriger. Es werden nur Inhalte behandelt, mit denen die Ökonomie ständig zu tun hat. Am Ende können Sie Funktionen graphisch darstellen, ableiten und optimieren, ohne und mit Nebenbedingungen.

Wenn Sie diesen Mathe-Survival-Kurs durchgearbeitet haben, dann sind Sie fit für das Lösen vieler typischer Aufgaben. Natürlich können Sie dann noch nicht alles, was man in der Differentialrechnung, geschweige denn in der gesamten Analysis, machen kann. Aber zumindest das Wichtigste.

Viel Erfolg und viel Spaß!

Inhalt

A) Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	3
1) Arten von Funktionen	3
1.1) Lineare Funktionen / Geraden	3
1.2) Nicht-lineare Funktionen / Kurven	6
2) Steigung	7
2.1) Lineare Funktionen / Geraden	8
2.2) Nicht-lineare Funktionen / Kurven	11
3) Ableitungen	12
4) Wichtigste Ableitungsregeln	14
5) Weitere Ableitungsregeln	16
5.1) Produktregel	16
5.2) Quotientenregel	17
5.3) Kettenregel	17
6) Optimierung ohne Nebenbedingung	18
6.1) Maximum	18
6.2) Minimum	20
B) Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen	22
7) Flächen	22
8) Scheibenschnitte	23
9) Partielle Ableitungen	25
10) Optimierung ohne Nebenbedingung	26
11) Optimierung mit Nebenbedingung / Lagrange-Funktion	28

A) Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Eine Funktion beschreibt eine Beziehung zwischen Zahlen. Üblicherweise bestimmt eine unabhängige Variable x eindeutig eine von ihr abhängige Variable y . D.h. jede Zahl, die wir für x einsetzen können, bestimmt genau eine Zahl y .

Abgesehen von dem Trivialfall $y = x$ steht x nicht alleine auf der rechten Seite. Vielmehr steht auf der rechten Seite eine Regel, nach der man aus x die Zahl y ermitteln soll. Der Wert für y hängt also direkt von x ab.

Beispiel:

$y = 3x + 2$ bedeutet: Multipliziere jede Zahl x mit 3 und addiere anschließend noch 2 hinzu; d.h. für $x = 1$ ergibt sich $y = 5$.

1) Arten von Funktionen

Ist kein Exponent speziell für x ausgewiesen (d.h. der Exponent beträgt 1), handelt es sich um eine lineare Funktion, d.h. eine Gerade. In allen anderen Fällen kann man von nicht-linearen Funktionen oder Kurven sprechen.

1.1) Lineare Funktionen / Geraden

Die Standardgleichung einer Geraden ist $y = f(x) = mx + b$

Mit:

y : Ordinatenvariable (auf der vertikalen Achse); abhängige Variable

m : Steigungsmaß

x : Abszissenvariable (auf der horizontalen Achse); unabhängige Variable

b : Ordinatenschnittpunkt

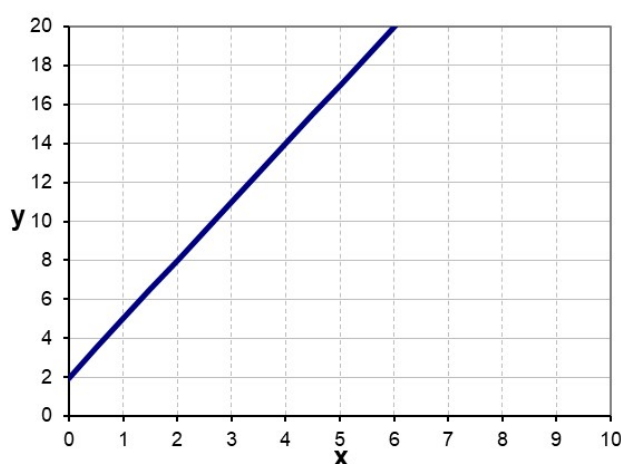
f : Funktion, bedeutet hier nur: y „ist eine Funktion von (=ist abhängig von)“ x

Um eine beliebige Gerade zeichnen zu können, muss man nur den Schnittpunkt auf der Ordinate markieren und von dort den nächsten Punkt markieren gemäß dem Steigungsmaß. Ist kein Steigungsmaß m gesondert ausgewiesen, dann beträgt die Steigung 1.

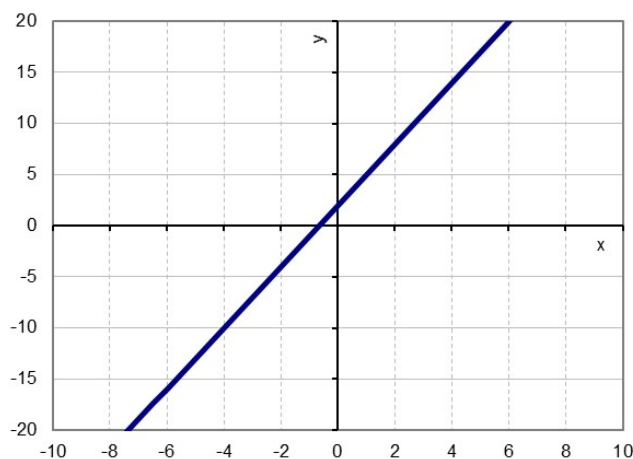
Beispiel:

$$y = 3x + 2$$

Markieren Sie auf der Ordinate den Punkt 2. Anschließend müssen Sie nur noch die Steigung von 3 eintragen, d.h. 1 Einheit nach rechts und drei nach oben. In einem Koordinatensystem sieht das dann so aus:



Diesen typischen Graphen kann man allerdings mathematisch noch um die negativen Achsenabschnitte erweitern, was aber in der Ökonomie öfters nicht nötig ist, da z.B. negative Preise und Mengen nur selten sinnvoll sind:



Der Abszissenschnittpunkt ergibt sich dort, wo $y = 0$ ist, also bei:

$$y = 3x + 2$$

$$0 = 3x + 2$$

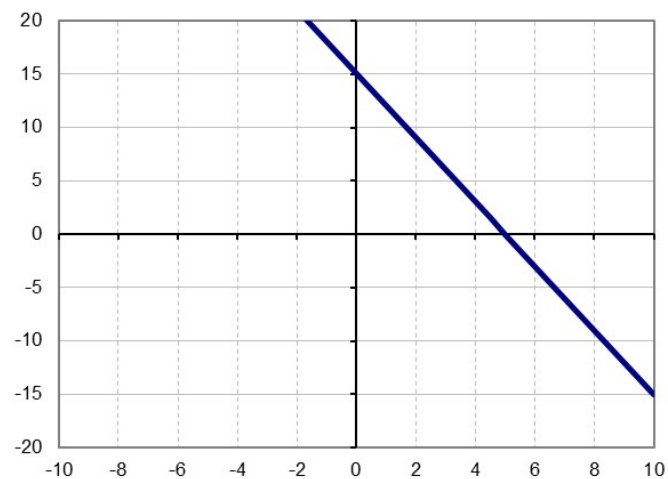
$$x = -2/3$$

Der Nordost-Quadrant heißt auch 1. Quadrant, wobei bis zum 4. Quadranten im Uhrzeigersinn weitergegangen wird.

Ist das Steigungsmaß negativ, dann fällt die Gerade:

Beispiel:

$$y = -3x + 15$$



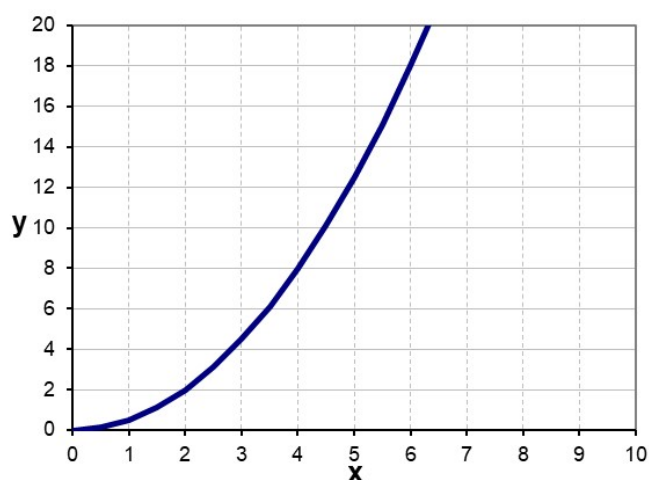
1.2) Nicht-lineare Funktionen / Kurven

Bei nicht-linearen Funktionen hat die unabhängige Variable x einen anderen Exponenten als 1. Dieser kann z.B. 2 sein (diese Funktion wird dann auch quadratische Funktion genannt).

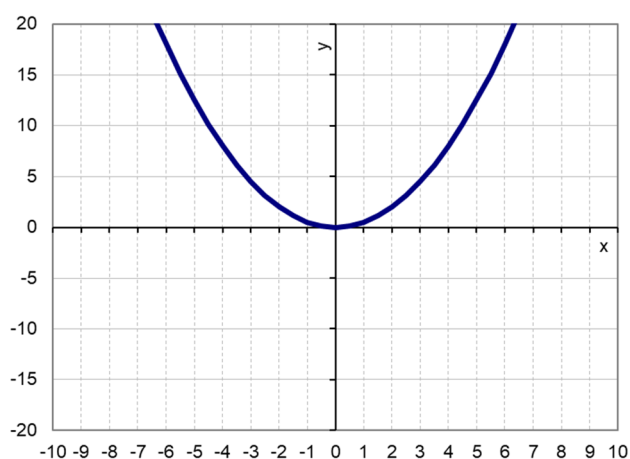
Beispiel:

$$y = 0,5x^2 \quad (\text{bedeutet } y = 0,5xx)$$

Diese Funktion sieht aus:



Die abhängige Variable y kann dabei auch bei negativen x -Werten (durch das x^2) nicht negativ werden, da negativ mal negativ positiv ergibt.

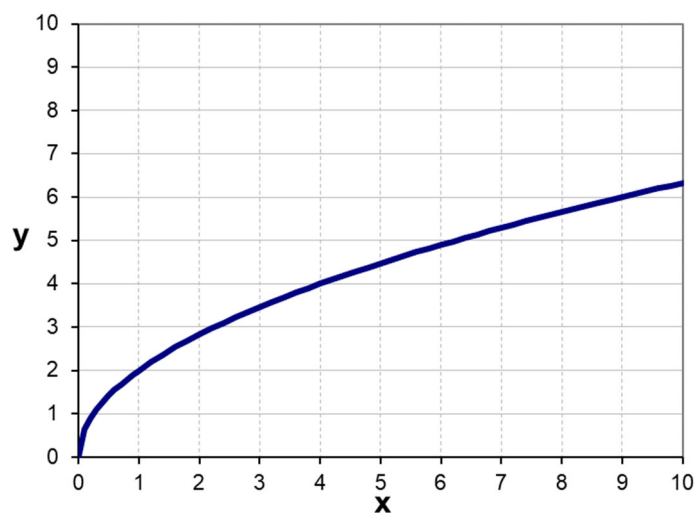


Wie aus den beiden oberen Graphen ersichtlich ist, biegt sich die ansteigende Kurve „nach oben“. Dies ist für alle einfachen nicht-linearen Funktionen der Fall, in denen der Exponent größer als 1 ist.

Ist der Exponent zwischen 0 und 1, dann biegt sich die ansteigende Kurve „nach unten“.

Beispiel:

$$y = 2x^{0,5}$$



Taucht die unabhängige Variable mehrmals mit unterschiedlichen Exponenten und/oder Vorzeichen auf, dann können sich die Verläufe von Steigung und Biegung im Laufe der Funktion auch mehrfach ändern.

2) Steigung

Ganz allgemein ist die Steigung einer Funktion das Verhältnis der Änderung der abhängigen Variablen y zur Änderung der unabhängigen Variablen x .

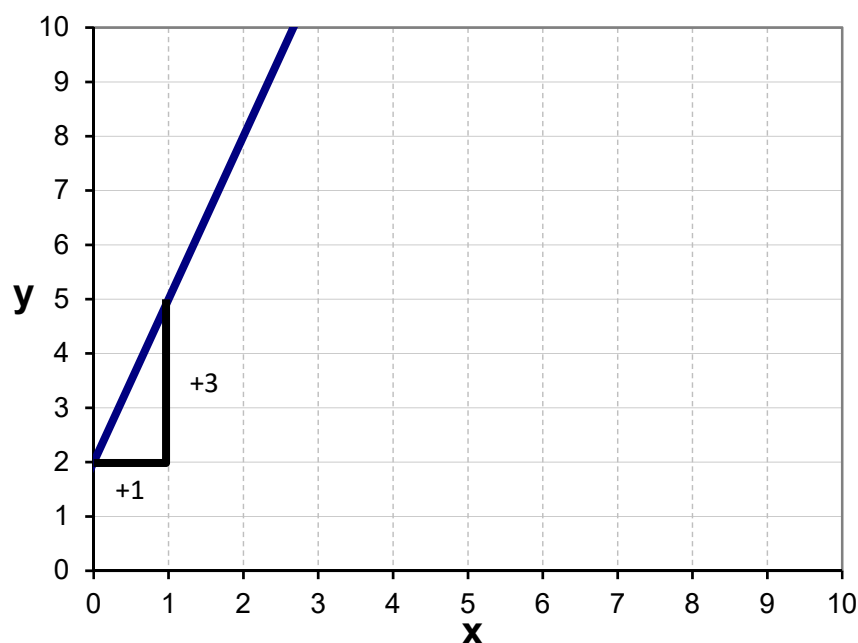
2.1) Lineare Funktionen / Geraden

Lineare Funktionen haben die Annehmlichkeit, dass man die Steigung der Funktion direkt vom Steigungsmaß ablesen kann. In unserem ersten...

Beispiel:

$$y = 3x + 2$$

...beträgt die Steigung demnach 3 (d.h. 1 „Schritt“ nach rechts und 3 „Schritte“ nach oben).



Anders ausgedrückt: Die Steigung entspricht dem Verhältnis der Änderung der abhängigen Variablen y ($= 3$) zur Änderung der unabhängigen Variablen x ($= 1$), d.h. 3 zu 1 oder $3/1 = 3$, formal:

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Änderung von } y}{\text{Änderung von } x} = \frac{3}{1} = 3 = m$$

Lineare Funktionen haben die zweite Annehmlichkeit, dass die Steigung in jedem Punkt auf der Geraden gleich groß ist, d.h. die Steigung ist überall 3 (sonst wäre es auch keine Gerade).

Falls m ein Bruch ist:

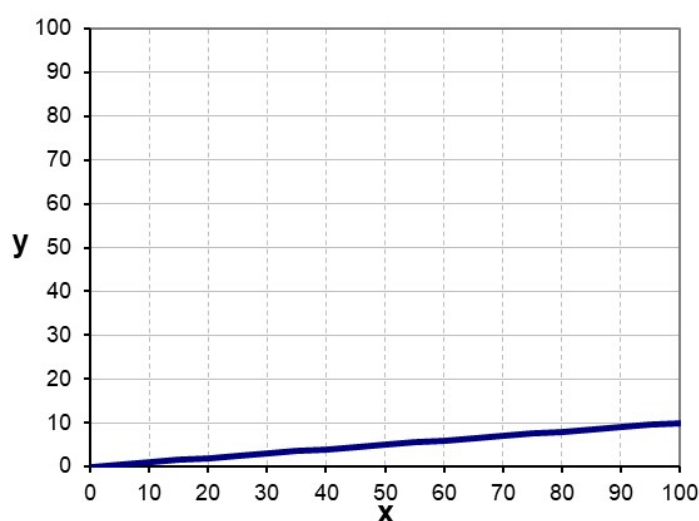
Beträgt z.B. $m = 1/2$, dann verläuft die Steigung wie folgt: Eine Einheit nach rechts und eine halbe Einheit nach oben, bzw. 2 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben. Das heißt: Ist die Steigung ein Bruch, dann müssen Sie einfach den Wert des Nenners nach rechts und den Wert des Zählers nach oben gehen. Bei $m = 3/8$ verläuft die Steigung demzufolge auf 8 Einheiten nach rechts 3 nach oben.

Die Steigung einer Geraden kann man aber auch noch auf andere Weise ausdrücken. Vom Straßenverkehr sind Steigungsschilder bekannt, die die Steigung in Prozent angeben.

Beispiel:

Steigungsschild = 10%

Dies bedeutet, dass die Straße auf 100m in der Horizontalen 10m (d.h. 10%) in die Vertikale geht:



Diese Straßenführung kann man auch leicht mit einer Geradengleichung ausdrücken. Die Steigung entspricht dem Verhältnis der Änderung der abhängigen Variable y (= 10) zur Änderung der unabhängigen Variablen x (= 100)

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Änderung von } y}{\text{Änderung von } x} = \frac{10}{100} = 0,1 = 10\% = m$$

Die Geradengleichung für 10% lautet also:

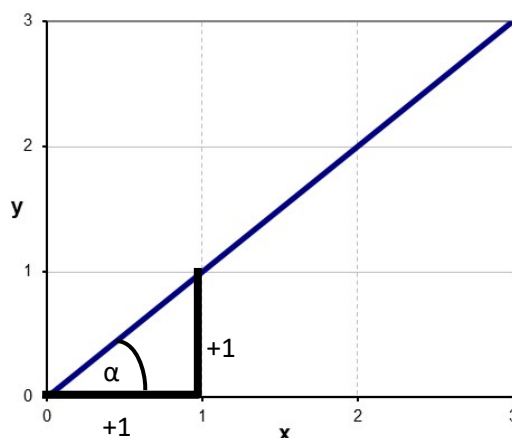
$$y = 0,1 x$$

Schließlich gibt es noch die Möglichkeit, die Steigung mit Hilfe des Tangens auszudrücken.

Gegeben sei z.B. die absolut einfachste lineare Funktion:

Beispiel:

$$y = x$$



Die Gerade steigt auf 1 Einheit nach rechts 1 Einheit nach oben, die Steigung ist also $m=1$. Der Winkel α zwischen der Geraden und der Horizontalen beträgt in diesem Fall 45° . Die Steigung ergibt sich somit auch als Tangens des Winkels α , mit $\tan(45) = 1$

D.h. es ergibt sich:

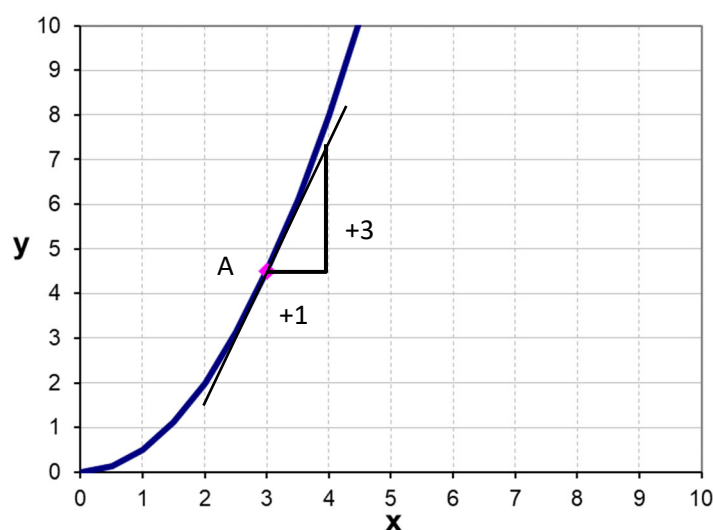
$$\text{Steigung} = m = \frac{\text{Änderung von } y}{\text{Änderung von } x} = \tan \alpha = m \cdot 100 \text{ (in \%)}$$

2.2) Nicht-lineare Funktionen / Kurven

Bei nicht-linearen Funktionen ändert sich die Steigung von Punkt zu Punkt entlang der Kurve. Die Steigung in einem Punkt der Kurve entspricht der Steigung der Tangente an diesem Punkt.

Beispiel von oben:

$$y = 0,5x^2$$



Im Punkt A ($x = 3$ und $y = 4,5$) beträgt die Steigung der Tangente 3:

$$\text{Steigung in A} = \frac{\text{Änderung von } y}{\text{Änderung von } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3 = m$$

Unterhalb von A verlaufen die Tangenten flacher, d.h. Steigungen $m < 3$, und oberhalb von A verlaufen die Tangenten steiler, d.h. Steigungen $m > 3$. Genau genommen benötigen wird für die Berechnung der Steigung von nicht-lineare Funktionen die 1. Ableitung, dazu kommen wir jetzt.

3) Ableitungen

1. Ableitung

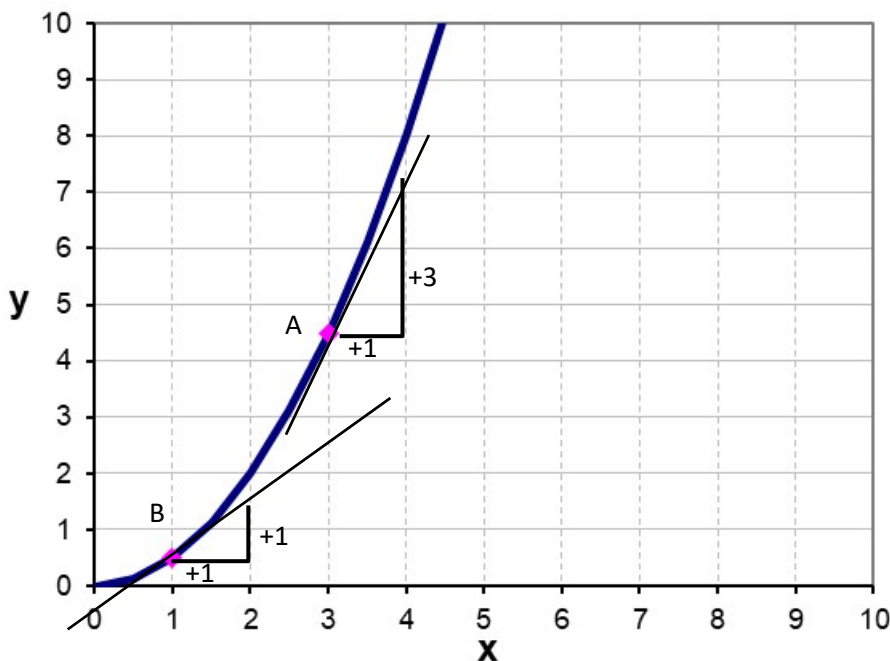
Die 1. Ableitung einer Funktion gibt die Steigung in einem Punkt dieser Funktion wieder. Genau genommen ist sie die Änderung der abhängigen Variablen y bei einer unendlich kleinen Änderung der unabhängigen Variablen x (d.h. die Änderung von x geht gegen 0).

2. Ableitung

Die 2. Ableitung gibt die Krümmung in einem Punkt dieser Funktion wieder (sie zeigt an, wie sich das y in der 1. Ableitung nach x ändert). Wenn beispielsweise in einem Abschnitt der Kurve die Steigungen (der Tangenten) immer größer werden, bedeutet das, dass die 2. Ableitung positiv ist (da ja die Änderung der Steigung – oder „die Steigung der Steigung“ – positiv ist).

Beispiel von oben:

$$y = 0,5x^2$$

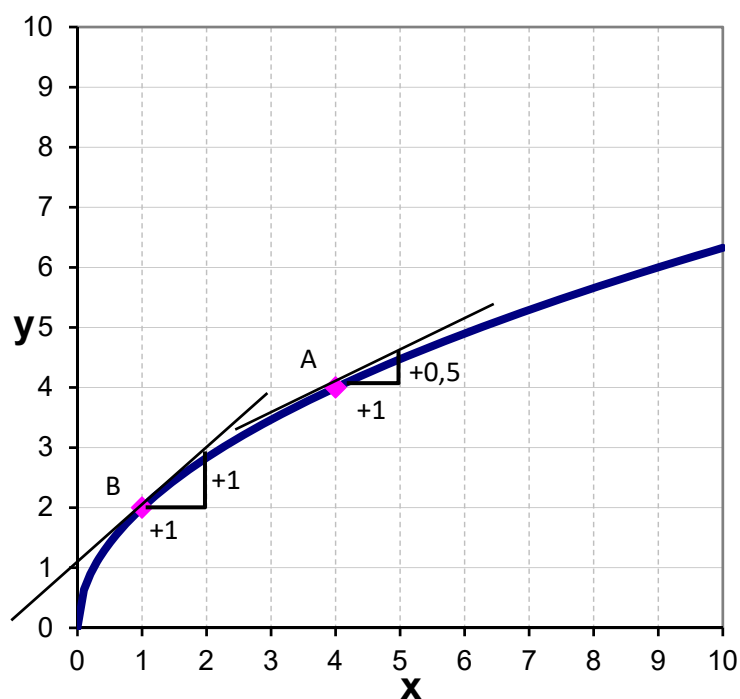


Von Punkt B nach Punkt A nimmt die Steigung zu (von 1 auf 3), d.h. die 2. Ableitung ist positiv. Wenn die 2. Ableitung positiv ist, spricht man auch von einer konvexen Krümmung.

Falls hingegen in einem Abschnitt der Kurve die Steigungen (der Tangenten) immer kleiner werden, bedeutet das, dass die 2. Ableitung negativ ist (da ja die Änderung der Steigung – oder „die Steigung der Steigung“ – negativ ist).

Beispiel von oben:

$$y = 2x^{0,5}$$



Von Punkt B nach Punkt A nimmt die Steigung ab (von 1 auf 0,5), d.h. die 2. Ableitung ist negativ. Wenn die 2. Ableitung negativ ist, spricht man auch von einer konkaven Krümmung.

4) Wichtigste Ableitungsregeln

Damit man die Werte für die Ableitungen exakt bestimmen kann, benötigt man Regeln, wie man eine Funktion genau abzuleiten hat.

Die wichtigsten Regeln lauten:

1. Alle Teile einer Funktion, die durch ein + oder – getrennt sind, werden einzeln abgeleitet.
2. Der Exponent über dem x wird vor das x gestellt und der alte Exponent wird um 1 verringert.
3. Ist der Exponent kleiner als 1 (z.B. $x^{0,5}$), dann wird der Exponent negativ.
4. Ein x „ohne“ Exponenten (d.h. mit einem Exponenten von 1) entfällt nach der Ableitung
5. Alle Teile ohne x fallen weg.

Da der Umgang mit Exponenten von zentraler Bedeutung ist, sollte man sich auch noch einmal die folgenden Regeln der Exponentialrechnung vergegenwärtigen:

1. $x^0 = 1$
2. $x^1 = x$
3. $x^2 = x \cdot x$
4. $x^{0,5} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
5. $x^{-0,5} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
6. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = x^1 = x$
7. $\frac{x^5}{x^3} = x^{(5-3)} = x^2$

Damit können Sie jetzt schon alle Standardgleichungen ableiten!

Um zu zeigen, dass Sie eine Funktion (nach x) einmal abgeleitet haben, steht dann auf der linken Seite der Gleichung statt des y folgender Ausdruck: $\frac{dy}{dx}$ (dieser Ausdruck wird auch als Differentialquotient bezeichnet). Für die zweite Ableitung hat sich folgender Ausdruck eingebürgert: $\frac{d^2y}{dx^2}$

Funktion: $y = f(x)$

1. Ableitung: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

2. Ableitung: $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$

Beispiele:

Funktion	1. Ableitung	2. Ableitung
$y = 3x + 2$	$\frac{dy}{dx} = 3$ (d.h. die Steigung der Geraden ist an jedem Punkt 3)	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (d.h. es gibt keine Krümmung bei einer Geraden)
$y = -2x + 1$	$\frac{dy}{dx} = -2$	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
$y = 4x^2 + 3x + 2$	$\frac{dy}{dx} = 8x + 3$	$\frac{d^2y}{dx^2} = 8$ (d.h. die Krümmung ist konvex)
$y = 2x^{0,5}$	$\frac{dy}{dx} = x^{-0,5}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = -0,5x^{-1,5}$ (d.h. die Krümmung ist konkav)
$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 3$	$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 4$
$y = x^{\frac{2}{3}}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}$
$y = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} = 2x^{-\frac{3}{4}}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{6}{4x^{\frac{7}{4}}}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{42}{16}x^{-\frac{11}{4}} = \frac{42}{16x^{\frac{11}{4}}}$

5) Weitere Ableitungsregeln

Ein bisschen schwieriger gestaltet sich die Ableitung, wenn Teilfunktionen mit x nicht per Strichrechnung (z.B. $y = x^2 + 2x$), sondern per Punktrechnung verknüpft sind.

Beispiel:

$$y = (4+x) (2-x)$$

In diesem Fall könnte man zwar zuerst die Teilfunktionen auflösen:

$$y = 8 + 2x - 4x - x^2 = -x^2 - 2x + 8$$

...und dann nach obigen Regeln ableiten:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -2x - 2$$

Die „vornehme“ Variante ist allerdings die Anwendung der Produktregel:

5.1) Produktregel

Die Produktregel besagt, dass die Ableitung einer Funktion mit zwei Teilfunktionen derart funktioniert: 1. Ableitung der 1. Teilfunktion mal 2. Teilfunktion + 1. Teilfunktion mal 1. Ableitung der 2. Teilfunktion.

Oder formal:

$$\text{Funktion: } y = f(x) = u(x) v(x) = uv$$

(Da es nur eine unabhängige Variable x in der Funktion gibt, kann man das geklammerte x auch weglassen.)

$$1. \text{ Ableitung: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = u'v + uv'$$

Beispiel:

$$\text{Funktion: } y = f(x) = u(x) v(x) = (4+x) (2-x)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = u'v + uv' = 1(2-x) + (4+x) \cdot -1 = 2-x-4-x = -2x-2$$

5.2) Quotientenregel

Die Quotientenregel funktioniert im Prinzip wie die Produktregel, alle Ausdrücke im Nenner bleiben dabei auch im Nenner. Es hat sich aber formal folgende Notation der Formel eingebürgert:

$$\text{Funktion: } y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u}{v}$$

(Da es nur eine unabhängige Variable x in der Funktion gibt, kann man das geklammerte x auch weglassen.)

$$1. \text{ Ableitung: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Beispiel:

$$\text{Funktion: } y = f(x) = \frac{4-x}{x}$$

$$1. \text{ Ableitung: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-1 \cdot x - (4-x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-x-4+x}{x^2} = \frac{-4}{x^2}$$

5.3) Kettenregel

Lautet die Funktion z.B. $y = f(x) = (4-x)^2$, dann kann man die 1. Ableitung gemäß dem Satz „äußere Ableitung mal innerer Ableitung“ bestimmen.

Äußere Ableitung: Exponent nach vorne ziehen und alten Exponenten -1 nehmen

Innere Ableitung: Klammer Ausdruck normal ableiten

$$\text{Funktion: } y = f(g(x))$$

$$1. \text{ Ableitung: } f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = \text{äußere Ableitung} \bullet \text{innere Ableitung}$$

Beispiel:

$$\text{Funktion: } y = (4-x)^2 \quad ; \text{ dabei ist } g(x)=4-x$$

$$1. \text{ Ableitung: } f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = 2(4-x) \bullet -1 = 2x-8$$

Alternativ kann man den Klammerausdruck in $y = (4 - x)^2$ auch zuerst auflösen:

$$y = (4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$$

(der mittlere Ausdruck $8x$ wird auch „das doppelte Produkt“ genannt) und dann mit der „einfachen“ Ableitungsregel loslegen:

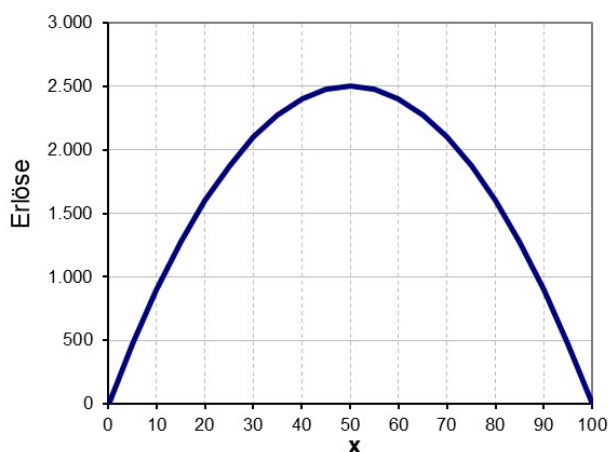
$$1. \text{ Ableitung: } f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2x - 8$$

6) Optimierung ohne Nebenbedingung

In der Ökonomie interessiert oft die Frage nach Extremstellen bzw. Optima (z.B. wie hoch ist die optimale Menge?). Für diese Frage ist die Maximierung (wo kann ich Gewinne maximieren? Wo kann ich Erlöse maximieren?) oder die Minimierung (wo sind meine Kosten minimal?) von Funktionen entscheidend. Aber wo sind diese optimalen Punkte? Formal können diese Punkte mithilfe der Ableitungen exakt ermittelt werden.

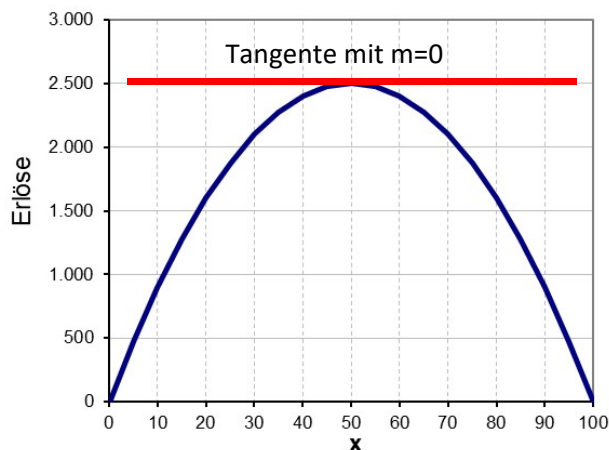
6.1) Maximum

Zunächst einmal der graphische Verlauf einer gegebenen Erlösfunktion:



Das Erlösmaximum liegt bei der Menge 50. (Den optischen Eindruck werden wir weiter unten noch mathematisch bestätigen.) Links vom Maximum steigt die Kurve noch an, rechts vom Maximum fällt sie hingegen.

D.h. nur im Maximum steigt die Kurve nicht und fällt die Kurve nicht! Mit anderen Worten: Die Steigung im Maximum ist Null. Eine Steigung von Null entspricht nun wiederum einer horizontalen Tangente.



D.h. Im Maximum einer Funktion $y = f(x)$ gilt:

1. Bedingung (notwendige Bedingung): $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

Die 1. Ableitung = 0 muss sein, damit die Tangente auch wirklich horizontal verläuft.

2. Bedingung (hinreichende Bedingung): $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0$

Da in einem Maximum die Kurve konkav verläuft, muss, wie oben dargestellt, auch die zweite Ableitung kleiner als Null sein.

Beispiel (für den obigen Graphen):

Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x = (-x + 100) \cdot x = -x^2 + 100x$ (Nachfragefunktion wird für p eingesetzt)

1. Ableitung: $E'(x) = \frac{dE}{dx} = -2x + 100$

1. Ableitung = 0 setzen für die Suche des Optimums: $E'(x) = -2x + 100 = 0$

Auflösen: $x = 50$ (d.h. bei der Menge = 50 haben wir ein Erlösmaximum)

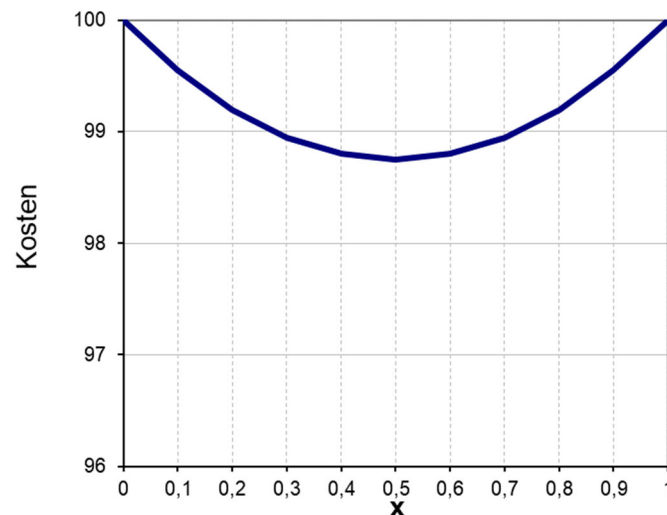
Einsetzen in die Erlösfunktion: $E(50) = 2500$ (d.h. die Erlöse betragen im Maximum 2500)

2. Ableitung: $E''(x) = \frac{d^2E}{dx^2} = -2 < 0$

Die 2. Ableitung ist negativ, d.h. die Kurve verläuft konkav. Es liegt wirklich ein Maximum vor.

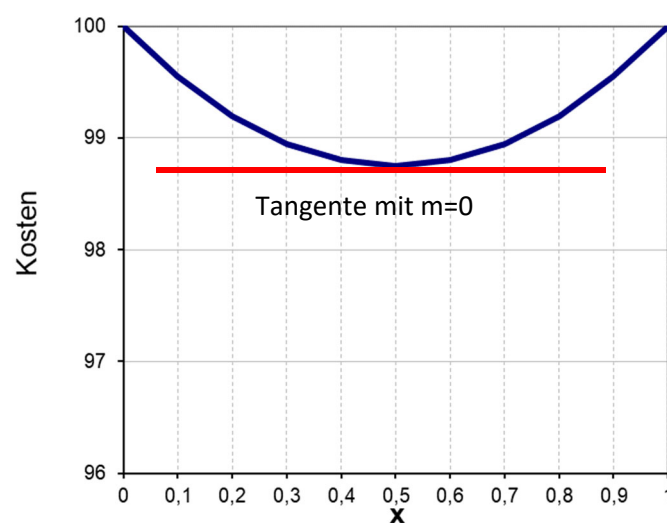
6.2) Minimum

Zunächst einmal der graphische Verlauf einer gegebenen Kostenfunktion:



Das Kostenminimum liegt bei der Menge 0,5. (Den optischen Eindruck werden wir weiter unten noch mathematisch bestätigen.) Links vom Minimum fällt die Kurve noch, rechts vom Minimum fängt hingegen die Kurve an zu steigen.

D.h. nur im Minimum fällt die Kurve nicht und steigt die Kurve nicht! Mit anderen Worten: Die Steigung im Minimum ist (auch) Null. Eine Steigung von Null entspricht nun wiederum einer horizontalen Tangente.



D.h. Im Minimum einer Funktion $y = f(x)$ gilt:

1. Bedingung (notwendige Bedingung): $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

Die 1. Ableitung = 0 muss sein, damit die Tangente auch wirklich horizontal verläuft.

2. Bedingung (hinreichende Bedingung): $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0$

Da in einem Minimum die Kurve konvex verläuft, muss, wie oben dargestellt, auch die zweite Ableitung größer als Null sein.

Beispiel (für den obigen Graphen):

Kostenfunktion: $K(x) = 5x^2 - 5x + 100$

1. Ableitung: $K'(x) = \frac{dK}{dx} = 10x - 5$

1. Ableitung = 0 setzen für die Suche des Optimums: $K'(x) = 10x - 5 = 0$

Auflösen: $x = 0,5$ (d.h. bei der Menge 0,5 haben wir ein Kostenminimum)

Einsetzen in die Kostenfunktion: $K(0,5) = 98,75$ (d.h. die Kosten betragen im Minimum 98,75)

2. Ableitung: $K''(x) = \frac{d^2K}{dx^2} = 10 > 0$

Die 2. Ableitung ist positiv, d.h. die Kurve verläuft konvex. Es liegt wirklich ein Minimum vor.

B) Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

Natürlich können Funktionen auch mehr als eine unabhängige Variable haben, dabei ist die Variable y dann z.B. abhängig von x_1 und x_2 .

Beispiele:

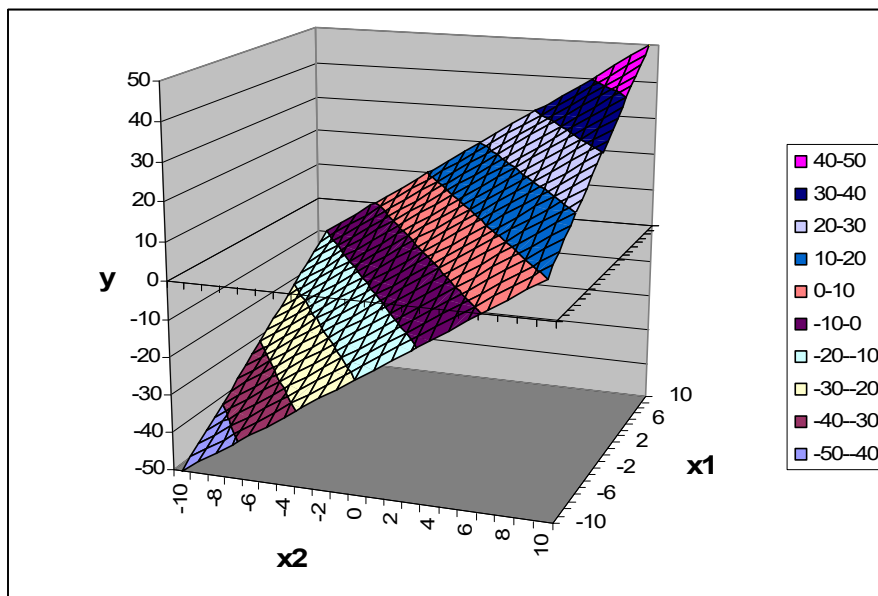
$$y = f(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$y = f(x_1; x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^3$$

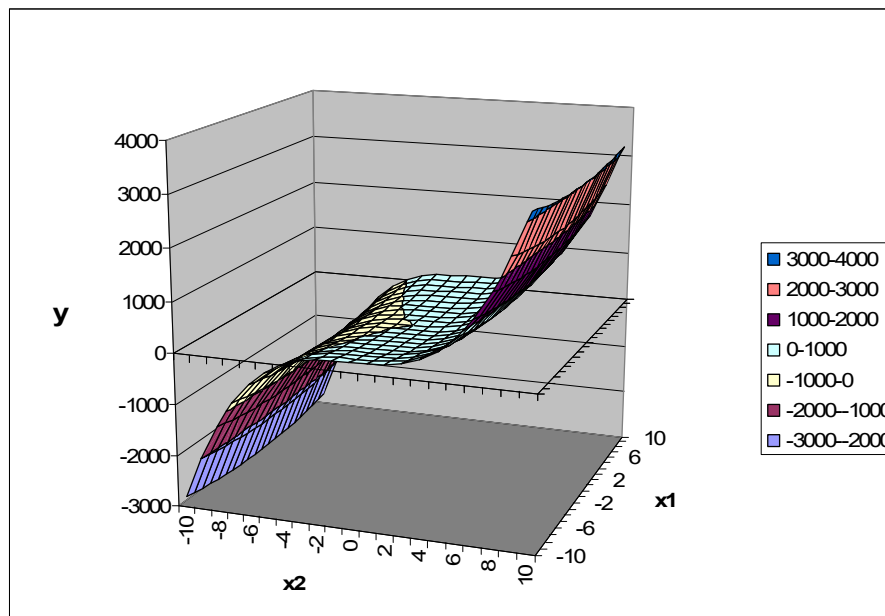
7) Flächen

Da die Gleichung $y = 2x_1 + 3x_2$ nun aber schon drei Variablen beinhaltet, benötigt man für die graphische Darstellung auch drei Achsen. Und aus dem Linienverlauf der Funktion wird eine Funktionsfläche oder ein Funktionsgebirge, in dem je einem Zahlenpaar für x_1 und x_2 genau ein Wert für y zugeordnet ist.

Für $y = 2x_1 + 3x_2$ sieht die zugehörige Fläche so aus:



Für $y = 2x_1^2 + 3x_2^3$ erhält man den folgenden Berghang:



8) Scheibenschnitte

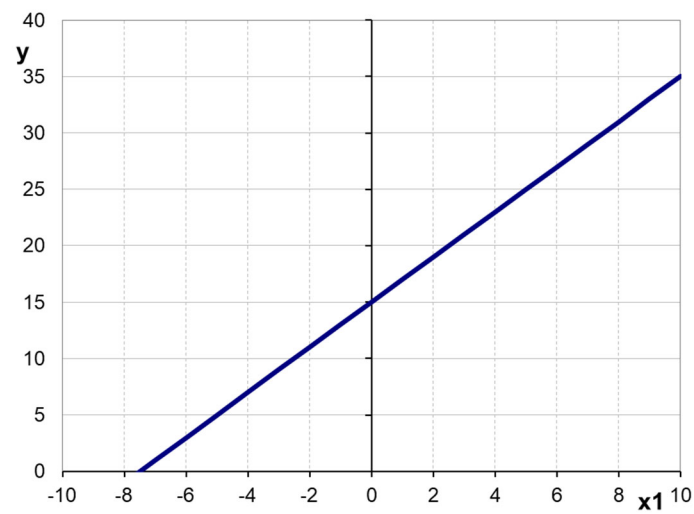
Üblich ist jedoch auch, dass man eine Scheibe aus dem 3D-Graphen herausschneidet, um eine Funktion $y = f(x_1; \bar{x}_2)$ bei Konstanz einer unabhängigen Variablen (z.B. $\bar{x}_2$, d.h. die Scheibe wird also bei $\bar{x}_2$ geschnitten) genauer hinsichtlich des Verhältnisses zwischen y und x_1 analysieren zu können. Der horizontale Strich über x_2 bedeutet, dass x_2 konstant gehalten wird.)

Beispiel:

$y = 2x_1 + 3\bar{x}_2$ wird mit $\bar{x}_2 = 5$ zu:

$$y = 2x_1 + 15$$

Aus der obigen Fläche in 3 Dimensionen (Abschnitt 7) lässt sich so eine Scheibe (Gerade) in nur 2 Dimensionen ausschneiden:

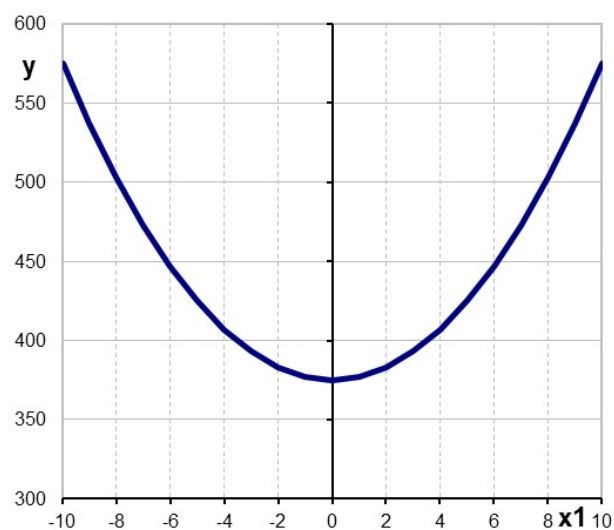


Beispiel:

$$y = 2x_1^2 + 3\overline{x_2^3} \quad \text{mit } \overline{x_2} = 5 \text{ zu:}$$

$$y = 2x_1^2 + 375$$

Aus dem obigen Berghang in 3 Dimensionen (Abschnitt 7) lässt sich so eine Scheibe (Kurve) in nur 2 Dimensionen ausschneiden:



9) Partielle Ableitungen

Bei Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen ermittelt man die Steigungen und Krümmungen mit partiellen Ableitungen. Eine partielle Ableitung nach z.B. x_1 ist dabei die Änderungsrate der abhängigen Variablen y bei einer unendlich kleinen Änderung der Variablen x_1 bei unveränderter Variable x_2 . Die Ableitungsregeln werden wie oben ausgeführt angewendet, nur dass die unabhängige Variable, nach der nicht abgeleitet wird (die also konstant bleibt), nicht als Variable behandelt wird, sondern als ganz normale Zahl.

Beispiel:

$$y = f(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$1. \text{ Ableitung nach } x_1: \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2$$

$$2. \text{ Ableitung nach } x_1: \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = f_{x_1 x_1} = 0$$

$$1. \text{ Ableitung nach } x_2: \frac{\partial y}{\partial x_2} = 3$$

$$2. \text{ Ableitung nach } x_2: \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f_{x_2 x_2} = 0$$

Es hat sich bei partiellen Ableitungen eingebürgert, für den Differentialquotienten das griechische ∂ anstatt des lateinischen d zu nehmen. Die Ableitungen werden genau wie bei Funktionen mit nur einer unabhängigen Variablen interpretiert.

Beispiel:

$$y = f(x_1; x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^3$$

$$1. \text{ Ableitung nach } x_1: \frac{\partial y}{\partial x_1} = 4x_1$$

$$2. \text{ Ableitung nach } x_1: \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = f_{x_1 x_1} = 4$$

$$1. \text{ Ableitung nach } x_2: \frac{\partial y}{\partial x_2} = 9x_2^2$$

$$2. \text{ Ableitung nach } x_2: \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f_{x_2 x_2} = 18x_2$$

Bei dieser Funktion lässt sich auch schön zeigen, dass es noch zwei weitere („gemischte“) zweite Ableitungen gibt: Wenn nämlich zuerst nach x_1 und dann nach x_2 abgeleitet wird, bzw. andersherum, wenn zuerst nach x_2 und dann nach x_1 abgeleitet wird. Diese gemischten zweiten Ableitungen werden für unseren nächsten Abschnitt benötigt und sehen hier so aus:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{x_1 x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{x_2 x_1} = 0$$

10) Optimierung ohne Nebenbedingung

Auch für Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen lassen sich Optima berechnen. Ganz analog zum obigen Vorgehen erreicht y sein Maximum (Minimum), wenn alle partiellen 1. Ableitungen gleich null sind (notwendige Bedingung) – bei der hinreichenden Bedingung wird es allerdings etwas komplizierter:

Hierfür müssen alle vier zweiten partiellen Ableitungen in einer Hesse-Matrix zusammengetragen und dann näher (auf die „Definitheit“) untersucht werden.

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann schreiben Sie die beiden Hauptminoren auf, mit:

1. Hauptminor: $H_1 = a$

2. Hauptminor: $H_2 = ad - bc$

Anschließend können Sie die hinreichende Bedingung für ein Optimum überprüfen. Falls:

Minimum falls: $H_1 > 0$ und $H_2 > 0$ („positiv definit“)

Maximum falls: $H_1 < 0$ und $H_2 > 0$ („negativ definit“)

In allen anderen Fällen ist mit diesem Hauptminoren-Kriterium keine Aussage möglich.

Beispiel:

Bei welchen Werten für x_1 und x_2 wird y maximal?

$$y = f(x_1, x_2) = 100x_1 - 10x_1^2 + 60x_2 - 24x_2^2 - 50$$

Zwei erste Ableitungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 100 - 20x_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 60 - 48x_2$$

Die beiden ersten Ableitungen müssen nun noch nach null aufgelöst werden:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 100 - 20x_1 = 0 \quad 100 = 20x_1 \text{ d.h. } x_1 = 5$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 60 - 48x_2 = 0 \quad 60 = 48x_2 \text{ d.h. } x_2 = 1,25$$

Nun beide Werte in die Ursprungsfunktion einsetzen:

$$y = f(5; 1,25) = 237,5$$

Wir vermuten eine Extremstelle im Wertetripel: $(x_1; x_2; y) = (5; 1,25; 237,5)$

Weiter geht es mit den vier gemischten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = f_{x_1x_1} = -20$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{x_1x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{x_2x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f_{x_2x_2} = -48$$

Hesse-Matrix:

$$H = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}$$

1. Hauptminor: $H_1 = -20 < 0$

2. Hauptminor: $H_2 = 960 > 0$

Ergebnis:

Im Wertetripel: $(x_1; x_2; y) = (5; 1,25; 237,5)$ befindet sich wirklich ein Maximum.

11) Optimierung mit Nebenbedingung / Lagrange-Funktion

Soll eine Funktion optimiert und gleichzeitig noch eine Nebenbedingung berücksichtigt werden, so kann man sich der Lagrange-Funktion bedienen.

Beispielsweise wird in der Haushaltstheorie gefragt, welches (nutzenmaximierende) Güterbündel gerade noch mit einem gegebenen Einkommen und gegebenen Preisen erreichbar ist. Die Zielfunktion (die in diesem Beispiel eine Nutzenfunktion ist):

$$U = f(x_1, x_2) = U(x_1, x_2)$$

... soll dabei maximiert werden unter der Nebenbedingung, dass man (nur) sein ganzes Einkommen dafür ausgeben kann. Die Nebenbedingung stellt somit eine Restriktion für die Maximierung dar und wird z.B. in der Haushaltstheorie durch eine Budgetgerade dargestellt:

$$y = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Diese muss im Folgenden noch nach 0 aufgelöst werden:

$$y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

Vorgehensweise:

1. Aufstellung der Lagrange-Funktion gemäß:

$$L = \text{Zielfunktion} + \lambda (\text{Nebenbedingung nach 0 aufgelöst})$$

2. Einstellen der beiden Funktionen:

$$L = U(x_1, x_2) + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

3. Bildung aller drei partieller Ableitungen und Nullsetzung dieser (Wo alle Ableitungen null sind, liegt das Maximum der Zielfunktion bei gegebener Nebenbedingung):

$$1. \text{ partielle Ableitung nach } x_1: \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$1. \text{ partielle Ableitung nach } x_2: \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$1. \text{ partielle Ableitung nach } \lambda: \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

(Diese Ableitung nach λ entspricht immer dem Inhalt der Klammer)

4. Auflösung des Gleichungssystems, am einfachsten ist es:

a) die beiden ersten partiellen Ableitungen nach λ aufzulösen:

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{p_1} \text{ und } \lambda = \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{p_2}$$

b) dann gleichzusetzen: $\frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{p_2}$

c) dann wiederum nach z.B. x_1 auflösen

d) schließlich diesen aufgelösten Ausdruck in die partielle Ableitung nach λ einsetzen und man erhält den Wert für x_2

e) nun muss dann dieser Wert für x_2 noch einmal in die partielle Ableitung nach λ eingesetzt werden und man erhält den Wert für x_1 .

f) Abschließend muss man nur noch x_1 und x_2 in die Ursprungsfunktion einsetzen.

Beispiel:

Gegeben: Nutzenfunktion: $U = f(x_1; x_2) = 1000x_1^{0,5}x_2^{0,5}$

Nebenbedingung: $1000 = 20x_1 + 50x_2$

2/3/4a) Lagrange-Funktion und drei erste Ableitungen:

$$L = 1000x_1^{0,5}x_2^{0,5} + \lambda(1000 - 20x_1 - 50x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 500x_1^{-0,5}x_2^{0,5} - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 25x_1^{-0,5}x_2^{0,5} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 500x_1^{0,5}x_2^{-0,5} - 50\lambda = 0 \Leftrightarrow 10x_1^{0,5}x_2^{-0,5} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1000 - 20x_1 - 50x_2 = 0$$

4b/4c) $\frac{\partial L}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial L}{\partial x_2}$ gleichsetzen und nach x_1 auflösen ergibt: $x_1 = 2,5x_2$

4d) Dies einsetzen in $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ ergibt: $x_2 = 10$

4e) Dies einsetzen in $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ ergibt: $x_1 = 25$

4f) Beide Ergebnisse in U einsetzen: $U = f(25; 10) = 15.811,39$

Ergebnis:

Mit $x_1 = 25$ und $x_2 = 10$ ist ein Nutzenmaximum erreicht (mit $U = 15.811,39$).